

DL, espaces vectoriels, dimension, applications linéaires

Durée : 4h. Calculatrices non autorisées. La clarté de la copie fera varier la note de ± 1 point.
Les questions simples doivent être traitées rapidement, ne perdez pas de temps au brouillon !

1 Pour s'échauffer

- 1) On pose $f : x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}-1}$. On rappelle que $\sqrt[3]{u} = u^{1/3}$.
- Déterminer le domaine de définition de f .
 - Déterminer le DL₂(0) de f .
 - En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et préciser la valeur de $f(0)$. Montrer que f ainsi prolongée est dérivable et préciser la valeur de $f'(0)$.
 - Préciser la position relative de f par rapport à sa tangente en 0. Est-ce que f admet un extremum local en 0 ?
- 2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \right)$

2 Autour des DL de la fonction tangente

- 1) Justifier que tangente admet un DL à l'ordre 7 en 0 et que ce DL est de la forme :

$$\tan x = x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + o_{x \rightarrow 0}(x^7)$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Dans la suite, on propose de calculer le DL à l'ordre 7 en 0 de la fonction tangente de plusieurs façons.

- 2) **a)** En utilisant la question 1) Exprimer la forme du DL à l'ordre 6 en 0 de $1 + \tan^2(x)$ en fonction des réels a, b, c .
- b)** En déduire une autre expression du DL à l'ordre 7 en 0 de $\tan(x)$ en fonction des réels a, b, c .
- c)** En déduire a, b et c . Conclure.
- 3) Dans cette question, pour éviter des calculs trop lourds, on ne déterminera que le DL à l'ordre 5 en 0 de tangente.
- a)** Calculer le DL à l'ordre 6 en 0 de $\ln(\cos x)$.
- b)** Conclure.

3 Endomorphismes dont le noyau et l'image sont supplémentaires

On s'intéresse au problème suivant : étant donné E un espace vectoriel de dimension finie notée n , on s'intéresse aux applications $f \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifient la condition suivante notée (S) :

$$(S) \quad E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$$

Le but de l'exercice est d'étudier des cas particuliers.

- 1) Soit p un projecteur de E . Que représentent $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$? En déduire si p vérifie ou non la condition (S).
- 2) Justifier qu'une symétrie s de E vérifie toujours la condition (S).
- 3) Dans cette question, $E = \mathbb{R}_2[X]$ et f est l'endomorphisme défini par $f(P) = P'$. Montrer que f ne vérifie pas la condition (S).
- 4) Dans cette question, $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $f : E \rightarrow E$ est l'application définie par $f(P) = \frac{1}{2}(X^2 - 1)P'' - XP' + P$.
 - a) Justifier que f est bien définie et montrer que f est linéaire.
 - b) Déterminer explicitement l'image par f du polynôme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
 - c) Déterminer le noyau de l'application f . Montrer qu'il est de dimension 2.
 - d) Préciser la dimension de l'image de f , puis en donner une base à l'aide des calculs déjà effectués.
 - e) On note $G = \left\{ Q \in E \mid Q'(1) = Q'(-1) = 0 \right\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E .
 - f) On pose $F = \text{Vect}(X, X^2)$. Montrer que F et G sont en somme directe. En déduire que $\dim G \leq 2$.
 - g) Montrer que $\text{Im } f \subset G$. En déduire que $G = \text{Im}(f)$.
 - h) Montrer (sans utiliser la question suivante...) que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires.
 - i) Montrer que f est en fait un projecteur.
- 5) On note enfin $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application définie par $f(x, y, z, t) = (0, -3y, 3x - 3z, y)$.
 - a) Déterminer le noyau et l'image de f (on donnera la dimension et une base à chaque fois).
 - b) Vérifier que f satisfait la condition (S).
 - c) Montrer toutefois que f n'est ni un automorphisme, ni un projecteur.

4 Après l'échauffement...

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- 1) Soit p et q deux projecteurs d'un \mathbb{K} -e.v. E . On suppose que $p \circ q = q \circ p$. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur, puis que :

$$\text{Ker}(p \circ q) = \text{Ker } p + \text{Ker } q \quad \text{et} \quad \text{Im}(p \circ q) = \text{Im } p \cap \text{Im } q$$

- 2) Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie. Soit f et g deux endomorphismes de E . On suppose que

$$E = \text{Ker } f + \text{Ker } g = \text{Im } f + \text{Im } g$$

Montrer que les deux sommes ci-dessus sont des sommes directes.

- 3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ l'application qui à un polynôme $P(X)$ associe $X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$. Vérifier que f est bien définie et est une symétrie. Déterminer précisément ses éléments caractéristiques.

Monsieur et Madame Hic ont deux fils jumeaux, comment s'appellent-ils ?

Réponse : Matt et Matt.